

LBRIS

We know
books

SECȚIUNEA DE AUR ȘI NU NUMAI

Constantele matematice

FERNANDO BLASCO

Traducere de Anca Dinu

LITERA

București

CUPRINS

Capitolul 0

Luca Pacioli, între artă și știință	7
<i>Primul portret al unui matematician</i>	12

Capitolul 1

Proporția divină	15
Media și extrema rație	17
Numărul de aur	23
Fibonacci, iepuri și numărul de aur	25
Proporția divină	29
<i>Hai să ne jucăm</i>	30
Unde apare numărul de aur?	34
<i>Trucul ciocolatei infinite</i>	43
Mituri de demontat: unde nu apare numărul de aur	46

Capitolul 2

Cea mai frumoasă formulă matematică	51
Poate o formulă să fie frumoasă?	51
Formula lui Euler	52
<i>Notăția factorială</i>	57
Cum se reprezintă nimicul?	59
<i>Dacă $a > b$, atunci $a = b$</i>	63

1, începutul tuturor lucrurilor

64

Numere reale sau imaginare?

68

Capitolul 3**Cele două numere care ne lipseau (plus altele)**

75

Apropo de e și de π

75

Care este valoarea lui π ?

77

Un π -pătrat magic

78

Mă ajută să îmi amintesc cantitatea

85

Este probabil să găsim aceste constante

90

Goana după zecimalele lui π și e

99

Curiozități și anecdote

104

Este mai mare π^e sau e^π ?

106

Capitolul 4**Alte constante demne de amintit**

109

În căutare de constante surprinzătoare

109

Apropo de seria armonică

110

Euler, Apery și Riemann

115

Constante și săpun

119

Constante magice

125

Enciclopedia online a secvențelor întregi

140

Constantele absente

140

Bibliografie recomandată

143

Capitolul 0

Luca Pacioli, între artă și știință

Ideea îi stăruia în cap de ceva timp, dar până atunci nu găsisese nici liniștea, nici stimulii necesari pentru a se concentra și a o dezvolta. Noțiunea de proporție, de maximă importanță pentru artele și artiștii Renașterii, îl obseda de ani de zile și, pe la sfârșitul secolului al XV-lea, era, mai mult ca oricând, pregătit să o scrie. Atunci, protagonistul nostru, **Luca Pacioli** (aprox. 1445-1517), a început să elaboreze *De divina proportione (Asupra Proporției Divine)*: „Orice cantitate poate fi împărțită în două părți inegale, astfel încât cea mai mică să fie față de cea mai mare la fel cum este cea mai mare față de întreg”.

Acesta a fost momentul potrivit pentru a-și dezvălui cunoștințele pe care le avea și aplicațiile acestora în estetică, în parte rezultatul studiului individual și în parte al învățăturilor măestrilor săi de-a lungul anilor. Iar pentru elaborarea a ceea ce avea să devină cea mai faimoasă lucrare a sa, Luca s-a putut baza pe ajutorul unui pictor și inginer cunoscut la Milano cu puțin timp în urmă, cu ocazia transferului său în oraș pentru a prezida catedra de științe matematice la cererea ducelui Ludovico Sforza. Așa cum era de așteptat, Pacioli a rămas profund impresionat când l-a întâlnit pe pictorul respectiv, care nu era altul decât **Leonardo da Vinci** (1452-1519).

Abilitățile artistice ale geniului Renașterii erau de neegalat, iar Pacioli nu întâlnește niciodată pe cineva cu o astfel de capacitate creativă și cunoștințe atât de vaste. Pentru Pacioli a fost o surpriză continuă, chiar și în modul său particular de a scrie; își lua notițe așa cum îi văzuse făcând demult pe arabi, în sens opus scrierii creștinilor. Curând s-a născut o prietenie solidă între Leonardo și Pacioli.

Obsesia lor pentru aritmetică și geometrie i-a unit și au început să colaboreze la diverse proiecte, precum trei cărți, cea deja menționată, asupra căreia ne vom întoarce în scurt timp, *De divina proportione* (Asupra Proporției Divine), *De viribus quantitatis* (Despre puterea numerelor) și *De ludo scachorum* (Despre jocul de șah). *De viribus quantitatis* este poate prima carte dedicată în întregime matematicii recreative. Este un compendiu de jocuri de magie (în care apare prima descriere a unui truc de cărți), probleme de ingeniozitate, puzzle-uri matematice, proverbe și probleme de logică. În ceea ce privește volumul despre șah, și el are propria sa istorie. În ciuda zvonurilor dintotdeauna potrivit cărora prima carte scrisă de Pacioli a fost cea dedicată șahului, aceasta a fost găsită în Italia abia în 2006, ascunsă printre alte 22.000 de volume, în biblioteca Palazzo Coronini Cronenberg, din Gorizia. Cele două subiecte, jocurile magice și șahul, au fost de interes comun pentru Luca și Leonardo, care este probabil autorul numeroaselor ilustrații ale pieselor de joc din lucrare.

Din moment ce împărtășeau mania pentru proporții, nu este surprinzător faptul că Pacioli l-a ales pe Leonardo pentru a ilustra cea mai ambițioasă lucrare a sa, *De divina proportione*, o sarcină pentru care geniul Renașterii a creat desene pe cât de precise, pe atât de explicative. Un exemplu este majuscula M reproducă pe pagina următoare, care va deveni ulterior logoul Metropolitan Museum of Art din New York. Pentru a înțelege contribuția pe care a adus-o Pacioli prin opera sa, în cele ce urmează vom parcurge pe scurt primii ani ai matematicianului.

§

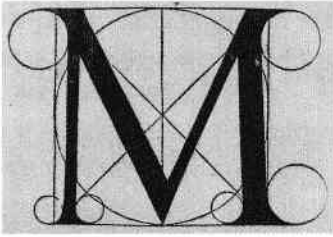


Figura 1. Ilustrația literei M din cartea *De divina proportione*. Alături, primul logo al Metropolitan Museum of Art din New York.

Născut în Sansepolcro, Pacioli și-a început probabil cariera de matematician la o vârstă fragedă, cu vizitele sale la atelierul lui **Piero della Francesca** (1416-1492), consăteanul său. Piero della Francesca, pe lângă faptul că era un pictor celebru, cunoștea *Elementele și Optica lui Euclid* – din care și-a inspirat studiul asupra perspectivei – și a studiat la început științele matematice – în special geometria – cu intenția de a integra aceste cunoștințe în opera sa picturală, chiar dacă până la urmă a ajuns să scrie mai multe cărți precum *De abaco* (Despre calcul) și *De quinque corporibus regularibus* (Despre cele cinci corpuri regulate). Nu este dificil de dedus că într-un mediu atât de dinamic pentru arte, în special pentru cele figurative, precum și pentru studiul științelor matematice și, în particular, al proporției, pregătirea lui Pacioli a înflorit, iar în el s-a născut dorința să aprofundeze pe de-a-ntregul aceste noțiuni. Au existat însă și critici: Giorgio Vasari, un cunoscut artist și biograf toscan, s-a opus lui Pacioli, câțiva ani mai târziu, creându-i acestuia o imagine proastă, prin răspândirea unor zvonuri cum că ar fi plagiat opera lui Piero della Francesca și că nu ar fi propus conținut original.

În orice caz, Pacioli, un tânăr foarte curios, și-a părăsit curând orașul pentru a-și continua studiile de matematică la Veneția, în special la școala lui **Domenico Bragadino** (? -1484), angajat ca tutor pentru fiii bogatului negustor Antonio Rompiasi, până la moartea sa, în 1470. Apoi, s-a mutat la Roma, unde a locuit în casa lui **Leon Battista Alberti** (1404-1472), un ilustru umanist care s-a remarcat ca arhitect, matematician și secretar personal al mai multor papi. Datorită pregătirii sale în acest mediu, Luca a dezvoltat un profund interes pentru geometrie și artă și, într-adevăr, a cultivat cele două discipline toată viața, insuflând aceeași pasiune oamenilor de care s-a înconjurat.

De-a lungul anilor, Luca Pacioli a căpătat treptat notorietate, mai ales datorită capacității sale de a menține relații cu oameni apropiați de putere. Relația sa cu Alberti, bine inserat în mediul papal, i-a permis să lege prietenii cu personalități eminente ale Bisericii. Această legătură cu sferile religioase – într-adevăr, Pacioli studiasse teologia îmbrăcând straiele de frate franciscan – i-a dat posibilitatea să călătorească în diferite locuri din Italia pentru a preda matematică (și a învăța). În 1477, a ajuns la Perugia, devenind primul profesor universitar de matematică și, pe măsură ce a călătorit în diferite orașe din peninsula italică și din zonele înconjurătoare, notorietatea sa a crescut. După ani de transferuri, în 1489 s-a întors la Sansepolcro, unde, aparent, a stârnit invidia religioșilor din localitate și, în consecință, în 1491, i s-a interzis să mai predea. În ciuda acestor lucruri, Luca a reușit să profite de ocazie pentru a definitiva opera despre care vom vorbi cu precădere în acest volum, un alt titlu celebru: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (Compendiu de aritmetică, geometrie, proporții și proporționalitate), care include lucrări despre diverse teme cum ar fi: aritmetică, algebră, geometrie și trigonometrie. Cartea a fost gândită ca un compendiu cu un scop pedagogic clar, ceva asemănător cu un manual de astăzi. Nu a inclus rezultate originale, în schimb a creat o colecție de metode utilizate și învățate de el personal. Pacioli însuși recunoaște că rezultatele prezentate în *Summa* se datorează lui Euclid, Boethius, Sacrobosco și Fibonacci, pentru a numi doar pe câțiva.

Una dintre contribuțiile care i-au crescut prestigiul operei lui Pacioli, considerată acum un concept fundamental pentru contabilitatea sistemului bancar actual, este cunoscută sub numele de „metoda dublei intrări”, care se traduce printr-un tabel cu dublă intrare. Comercianții medievali calculau intrările, preocupându-se exclusiv de banii de care dispun. Transformarea schimburilor comerciale și extinderea lor la scară globală au dus la nașterea băncilor, fapt ce a creat noi nevoi contabile, motiv pentru care a început să se întrevadă utilitatea păstrării unui registru al tranzacțiilor. De fapt, tabelul cu intrare dublă, care a făcut posibilă urmărirea tuturor tranzacțiilor unui magazin într-un mod fără echivoc, nu a fost o idee originală a lui Pacioli. Unele documente atestă utilizarea sa anterioară: în 1879, într-o casă în care trăia negustorul **Francesco di Marco da Prato Datini** (1335-1410) cu secole înainte, au fost găsite scrisori, cărți contabile, polițe de asigurare și alte documente comerciale, care dovedeau clar utilizarea acestui sistem și, cum una dintre primele slujbe ale lui Pacioli fusese cea de profesor al fiilor unui bogat negustor pe nume Rompiasi, este foarte plauzibil ca această tehnică contabilă să fi fost cunoscută în acest mediu. Cu toate acestea, în 1494 a publicat *Summa* la Veneția, o carte din care a reușit să vândă 2.000 de exemplare, un număr surprinzător de mare pentru acea vreme. Lucrarea a devenit destul de cunoscută pe întreg continentul european, a fost tradusă în diferite limbi și plagiată (la acea vreme, cărțile nu erau „descărcate” online, dar exista deja o modalitate de a le „pirata”). Într-adevăr, faima lui Pacioli se datora faptului că propusese suficiente exemple în lucrarea sa pentru a explica în mod clar cum se folosește această nouă metodă; tot din acest motiv este considerat tatăl contabilității.

Una dintre copiile *Summa* a căzut în mâinile unui inginer, om de știință și artist care lucra la Milano, la curtea lui Ludovico Sforza, care i-a sugerat ducelui să ia legătura cu Pacioli pentru a-l invita să lucreze în oraș: așa cum am menționat la începutul capitolului, personajul în cauză nu era nimeni altul decât Leonardo da Vinci.

PRIMUL PORTRET AL UNUI MATEMATICIAN

Una dintre cele mai importante contribuții ale lui Luca Pacioli, după cum am mai menționat, a fost diseminarea multor idei din domeniul matematicii, pe care a reușit să le colecteze; în plus, a intrat în istorie pentru că el a fost primul matematician al cărui portret s-a păstrat. Pictura este atribuită lui Jacopo de' Barbari, deși se crede că și Leonardo și-a adus contribuția la compoziție, dată fiind prezența unui rombicuboctaedru destul de elaborat, prea dificil pentru orice alt artist, în afară de el. În orice caz, în pictură, Pacioli este reprezentat cu un exemplar al *Elementelor* lui Euclid în mână. În pictură sunt vizibile și instrumentele matematicienilor vremii: cărți, busole, o tăbliță pentru scris, demonstrații și raționamente, precum și modele de poliedre utile pentru studiul geometriei.

Norocul adusese laolaltă două genii renaștentiste. Până în acel moment, Pacioli frecventase maștri celebri, și totuși cele mai semnificative și satisfăcătoare conversații (despre utilizarea științelor matematice și a științelor naturii în artă, domenii în care proporția era de o importanță fundamentală) au apărut, fără îndoială, datorită introducerii lui la curtea milaneză a lui Ludovico Sforza, în 1496, ca profesor de științe matematice. *De divina proportione* a fost publicată în 1509, la Veneția.

Leonardo da Vinci și Luca Pacioli au întruchipat idealul renaștentist conform căruia diferite ramuri ale cunoașterii trebuiau cultivate. La fel ca da Vinci, Pacioli a adus contribuții notabile la numeroase domenii ale științei, deși pe parcursul acestor pagini ne vom concentra cu precădere asupra contribuțiilor sale în științele matematice și, în special, în studiul constantelor.



Figura 2. Portretul
lui Pacioli atribuit
lui Jacopo de' Barbari.



Această carte este împărțită în patru capitole. În primul, se face o analiză a secțiunii de aur, de la concepția ei aparținându-i lui Euclid, până în zilele noastre, fără a-l uita, desigur, pe Luca Pacioli. După prezentarea proporției divine, continuăm cu cea a constantelor matematice fundamentale, cum ar fi numerele 0 și 1, împreună cu numărul imaginar i . Acest număr apare în anumite ecuații fără soluții în mulțimea numerelor reale. Matematicianul **Girolamo Cardano** (1501-1576) l-a descoperit, inspirându-se chiar de la Luca Pacioli, care a arătat clar în *Summa* că nu a fost găsită încă o soluție generală la ecuația cubică. Așadar, Cardano a început să lucreze la soluția ecuației cubice și, astfel a ajuns să descopere și numerele imaginare.

În capitolul al treilea vom vorbi despre alte două constante fundamentale din istoria științelor matematice. Una dintre ele este faimosul număr π , a cărui valoare este prezentă în texte de acum mai bine de două milenii înainte de începutul erei noastre, chiar dacă litera grecească nu era folosită pentru denumirea acestei cantități.

Cealaltă constantă este numărul e , care s-a dovedit esențial pentru dezvoltarea științelor matematice și care apare în mod natural peste tot în analiza matematică, fiind necesar la calcularea limitelor și la definirea noilor funcții matematice.

Mai târziu, în capitolul al patrulea, vom face cunoștință și cu alte constante, mai recente decât e . Având în vedere obiectivele și lungimea acestei cărți, destinată popularizării științelor matematice, nu vom putea aborda tot ce ne-am fi dorit. Prin urmare, prin această alegere a constantelor, intenționăm să stimulăm curiozitatea cititorilor, care vor putea descoperi cum apar aceleași constante în arii ale științelor matematice fără nicio conexiune aparentă. Iată câteva exemple: constanta Euler-Mascheroni, constantele legate de peliculele de săpun, cele ale trucurilor magice și chiar și constantele legate de o foaie de hârtie pliată.

Dacă paginile disponibile nu ne-ar fi forțat să facem o selecție atentă, am fi scris de la zero cartea *Mathematical constants* de Steven R. Finch – o operă voluminoasă lungă de 600 de pagini – care include mult mai multe. Este o carte destinată consultării, așadar își propune alte obiective decât cea de față. Pe scurt, citirea sa este călduros recomandată pentru îmbogățirea noțiunilor și descoperirea altor constante care nu și-au găsit locul aici: unele referitoare la domeniul fizicii, altele care au necesitat elaborări matematice complicate sau au necesitat o analiză aprofundată a contextului pentru a putea fi explicate.

Capitolul 1

Proporția divină

Se pare că despre secțiunea de aur au curs deja râuri de cerneală. De ce, atunci, să dedicăm încă o carte acestei constante matematice? Mulți au fost fascinați de secțiunea de aur, atât matematicieni, cât și neavizați ai subiectului: artiști – muzicieni și pictori –, biologi, arhitecți și ilustratori, scriitori și chiar numeroși adepți ai pseudoștiinței. Deși este adevărat că apare deseori în natură, este la fel de adevărat că am vrea să-o vedem și în locuri în care, în sine, este absentă. Aici vom vorbi despre acest număr, despre unele dintre proprietățile sale, despre relația sa cu șirul lui Fibonacci și vom da exemple în care el se observă în natură. Mai mult, vom trece în revistă o serie de mituri legate de această proporție.

Ceea ce Luca Pacioli a definit ca „proporție divină” și care astăzi este mai bine cunoscut sub numele de „secțiunea de aur”, purtase înainte și numele de „medie și extremă rație”: autorii au studiat același concept, în epoci diferite. Astfel, vom reveni la această noțiune de-a lungul istoriei și, în principiu, vom urma o ordine cronologică. Capitolul începe cu descoperirea acestei cantități în Grecia antică de către unii matematicieni precum Euclid și Pitagora, iar pentru a ne referi la aceasta, vom folosi termenul de „secțiunea de aur” și litera greacă Φ , chiar dacă utilizarea acestora a început să

se răspândească în momente diferite, și anume, nu înainte de secolul al XIX-lea și la începutul secolului următor, mai exact în 1929. Astfel, pentru a menționa acest concept, vom folosi, în principiu, denumirea și notația actuală, de uz comun.

După Grecia antică, ajungem în Evul Mediu fără să întâlnim referințe directe la secțiunea de aur. Însă, această noțiune a fost tratată într-un mod indirect, și fără ca matematicianul care a făcut-o să fie conștient de aceasta. Ei bine, da, vorbim despre Leonardo Fibonacci și faimosul său șir. În principiu, în această succesiune de numere nu se găsește secțiunea de aur, și totuși, la o privire mai atentă asupra proprietăților sale, este posibil să o identificăm și, în plus, în contexte diferite. Într-adevăr, șirul lui Fibonacci și secțiunea de aur par a fi legate, chiar dacă, pentru a explica această legătură, a trebuit să se aștepte câteva secole.

Mai târziu, însă, în timpul Renașterii, se face o mențiune explicită a secțiunii de aur, idealizată, ridicată la rangul de proporție divină de către Luca Pacioli sau folosită de un geniu precum Leonardo da Vinci în unele dintre compozițiile sale. Popularizarea acestei cantități la inițiativa lui Pacioli a dus la demararea cercetărilor în acest domeniu, într-o măsură atât de mare, încât oamenii de știință de calibrul lui Kepler au fost fascinați de idee. S-ar putea ca mitul de a considera această cantitate ca fiind numărul proporțiilor perfecte să fi apărut chiar atunci. În realitate, povestea care a dus la idealizarea ei, precum și la exagerarea proprietăților sale estetice este sinuoasă. Conform opiniei multor mistici, secțiunea de aur ar deține o mare putere simbolică și aproape totul ar fi guvernat de acest număr; de fapt – vom vedea în scurt timp –, nu apare atât de des pe cât se spune.

Tocmai din acest motiv, vom dedica câteva paragrafe din primul capitol pentru a verifica exact unde apare secțiunea de aur și în ce alte locuri, în realitate, doar o interpretare forțată permite identificarea ei. Contrar anumitor afirmații cu privire la acest subiect, informațiile sunt rare și, deși, cu siguranță, unii pictori și arhitecți au fost inspirați de aceasta în proiectarea operelor lor, în alte cazuri nu putem face decât simple speculații.